

Сучасні обчислювальні методи розв'язування задач дослідження динамічних процесів Робоча програма навчальної дисципліни (силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Третій (освітньо-науковий)</i>
Галузь знань	<i>11 - Математика та статистика</i>
Спеціальність	<i>113 Прикладна математика</i>
Освітньо-наукова програма	<i>Математичне моделювання та обчислювальні методи</i>
Статус дисципліни	<i>Обов'язкова</i>
Форма навчання	<i>очна(денна)</i>
Рік підготовки, семестр	<i>2 курс осіннього семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>120 годин / 4 кредити ЄКТС (лекції – 28 год., практичні заняття – 12 год., СРС – 80 год.)</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>залік, модульна контрольна робота</i>
Розклад занять	<i>2 год лекційних та 1 год практичних занять на тиждень</i>
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	<i>Лекції та практичні заняття проводить: член-кореспондент, д.т.н., професор, Трофимчук Олександр Миколайович, trofymchuk@nas.gov.ua</i>
Розміщення курсу	<i>https://classroom.google.com/c/ODQ0NzY0MTcxNjE2?cjc=ooyvri4q</i>

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Вивчення даної дисципліни забезпечується дисциплінами обов'язкового компоненту циклів загальної та професійної підготовки: «Дискретна математика», «Чисельні методи», «Теорія ймовірностей», «Програмування» та «Математичної статистики». Вивчення дисципліни «Сучасні обчислювальні методи розв'язування задач дослідження динамічних процесів» забезпечує засвоєння дисциплін вибіркового блоку таких, як «Математичне та програмне забезпечення розв'язання задач математичної фізики», «Сучасні технології обчислювального інтелекту, інтелектуальні обчислення та аналіз даних у дослідженні динамічних систем та процесів» та «Моделі, методи, технології штучного інтелекту та інтелектуальний аналіз даних у дослідженні динамічних систем та процесів» тощо.

***Мета:** формування у здобувачів ступеня доктора філософії за спеціальністю 113 «Прикладна математика» системного наукового розуміння сучасних теоретичних та алгоритмічних засад чисельного моделювання динамічних процесів, а також набуття компетентностей з розроблення, аналізу, реалізації та верифікації високоефективних обчислювальних методів для дослідження складних часово-просторових систем, зокрема на основі моделей у вигляді звичайних і рівнянь у частинних похідних, стохастичних та мультифізичних моделей.*

Предмет вивчення є теоретичні засади, алгоритмічні підходи та програмна реалізація сучасних чисельних методів моделювання, аналізу й прогнозування динамічних процесів, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь у частинних похідних, інтегро-диференціальних, стохастичних та мультифізичних моделей.

Програмні результати навчання:

Загальні компетентності

- ЗК01. Здатність абстрактно мислити, виконувати поглиблений критичний аналіз, оцінку і синтез нових та комплексних ідей, формування необхідних методологічних принципів і навичок аналізу предмету наукового дослідження і явищ реального світу осмисленого підходу до життя, відокремлювати головні проблеми від другорядних, розуміти глобальні аспекти та їх наслідки;*
- ЗК02. Вміння виявляти проблему, виконувати постановку задачі та вирішувати її, зокрема, виявляти актуальні, значущі проблеми, які потребують розширення та переоцінки існуючих та/або розроблення нових підходів, створення нових моделей, методів, технологій, тощо генерувати нові ідеї.*
- ЗК03. Здатність до ґрунтовних досліджень, пошуку, оброблення аналізу інформації з різних джерел, використання сучасних інформаційних технологій, започаткування, планування, реалізації та коригування послідовного процесу ґрунтового наукового дослідження, демонструючи значну авторитетність, інноваційність, високий ступінь самостійності, з дотриманням належної академічної та професійної доброчесності й здатності до саморозвитку та самонавчання"*
- ЗК04 Здатність використовувати академічну українську та іноземну мови у професійній діяльності та дослідженнях, застосовувати методи та технології наукових комунікацій для оприлюднення результатів досліджень, ефективно взаємодіяти у плюрилінгвальному (багатомовному) та полікультурному середовищі, працювати у міжнародному контексті.*

Фахові компетентності

- ФК01. Здатність виконувати оригінальні наукові дослідження, визначати наукову проблему, формулювати робочі гіпотези дослідження, отримувати науковий результат, який передбачає продукування нових знань в прикладній математиці та дотичних мультидисциплінарних сферах, оприлюднювати отримані наукові результати*
- ФК02. Здатність до формулювання цілей та задач дослідження, його структурно-логічної схеми, розвинення окремих напрямків досліджень на основі існуючих та власних теоретичних підходів, моделей і методів, алгоритмів, що передбачає глибоке переосмислення наявних та створення нових цілісних знань.*
- ФК03 Здатність спілкуватись українською та англійською мовами, усно і письмово презентувати результати власних наукових досліджень, розуміти англомовні наукові тексти в галузі прикладної математики, вільно спілкуватись з питань, що стосуються*

сфери наукових та експертних знань, з колегами, широкою науковою спільнотою, суспільством у цілому

- ФК04** Здатність застосовувати сучасні інформаційні та комунікаційні технології, працювати з структурованими та неструктурованими даними, отримуваними з баз даних, електронних ресурсів мережі Інтернет, інших джерел, використовувати спеціалізоване програмне забезпечення для математичного моделювання та застосування обчислювальних методів як у процесі навчання, так і на всіх етапах наукової діяльності: теоретичного обґрунтування постановки задач та вибору методу її розв'язку, вибору методики виконання дослідження, проведення чисельних експериментів, практичного застосування, аналізу та інтерпретації результатів.
- ФК05** Здатність виявляти, ініціювати, розв'язувати комплексні проблеми у сфері прикладної математики започатковуючи дослідницькі, інноваційні проекти, розробляти дослідницькі пропозиції, планувати та виконувати НДР на замовлення та на конкурсній основі, провадити дослідження самостійно, керувати проектами та формувати команду дослідників для їх реалізації
- ФК06** Здатність до розроблення нових та застосування математичних моделей, обчислювальних методів до розв'язання широкого кола прикладних задач, зокрема, в сфері національної безпеки та оборони, екологічної безпеки і збалансованого природокористування
- ФК07** Здатність розв'язувати наукові та науково-прикладні проблеми, формулювати наукову проблему та робочу гіпотезу, будувати і розробляти логічну математичну схему розв'язку задач, обґрунтувати пропоновану методику розв'язку задач з належною аргументацією з чітким визначенням припущень, засобів дослідження і висновків щодо досягнення цілей, створення нових цілісних знань, безперервного саморозвитку та самовдосконалення
- ФК08** Здатність приймати науково-обґрунтовані рішення, щодо розроблення нових методів та моделей, у процесі дослідження об'єктів та систем, робити на основі математичної постановки задачі попередній аналіз очікуваних результатів досліджень на основі загальних властивостей поведінки розв'язків задач більш загальних класів, оцінювати нові прикладні аспекти виконаних досліджень, за потреби, виконувати їх адаптацію для подальшого розвитку і використання для розв'язку інших задач прикладної математики та дотичних сферах
- ФК09** Здатність використовувати дані експериментів і натурних спостережень на етапах постановки задач, опрацювання проектних гіпотез моделі і формулювання результатів досліджень.
- ФК11** Здатність дотримуватись академічної та професійної доброчесності, морально-етичних правил поведінки, етики досліджень в академічному середовищі

Програмні результати навчання

- ПРН05.** Знати та розуміти методологічні основи прикладної математики, методи наукового дослідження в даній галузі відповідно до її об'єкту і предмету, застосовувати міждисциплінарний підхід, використовувати у власних дослідженнях, науковій та науково-педагогічній діяльності
- ПРН07.** Вміти оцінювати, класифікувати і обґрунтовувати вибір методів, алгоритмів, методик розв'язання задач дослідження, здійснювати пошук та оброблення даних, застосовувати сучасні інструменти та технології пошуку та аналізу даних, необхідних для виконання дослідження, застосовувати методи математичного моделювання, обчислювальні методи, методи математичної фізики, прикладної статистики, штучний інтелект.

- ПРН08. Формулювати гіпотези, виконувати теоретичний аналіз, експериментально підтверджувати, обґрунтовувати і застосовувати на практиці нові ідеї, інноваційні розробки, методи, технології розв'язку професійних, науково-технічних задач, в тому для національної безпеки та оборони, екологічної безпеки і збалансованого природокористування.
- ПРН10 Знати сучасні тенденції розвитку, методи математичної фізики, вміти застосовувати ці знання для розв'язання широкого кола теоретичних та прикладних задач математичної фізики
- ПРН11 Вміти застосовувати знання в галузі прикладної математики для провадження міждисциплінарних досліджень, зокрема розв'язання слабкоформалізованих задач національної безпеки та оборони, екологічної безпеки і збалансованого природокористування
- ПРН12. Знати теорію сингулярних та гіперсингулярних інтегральних рівнянь та знати методи побудови моделей із застосуванням теорії сингулярних рівнянь, виконувати математичну постановку задач та вміти створювати обчислювальні технології та відповідні алгоритми
- ПРН13 Знати та вміти застосовувати математичні моделі, обчислювальні методи, інформаційні технології та штучний інтелект для дослідження динамічних систем, аналізу та прогнозування їх стану
- ПРН 15 Знати теорію асимптотичного аналізу, в тому числі числові і асимптотичні методи розв'язання квазілінійних гіперболічних рівнянь для розв'язання задач математичної фізики, в тому числі в сфері національної безпеки та оборони

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Дисципліна «Сучасні обчислювальні методи розв'язування задач дослідження динамічних процесів» вивчається в осінньому (третьому) семестрі другого курсу, тому дисципліна спирається на знання та компетентності, сформовані в межах обов'язкових освітніх компонентів циклів загальної та професійної підготовки, зокрема «Теорія ймовірностей», «Програмування» та «Математична статистика», що вивчаються на бакалавраті та магістратурі за спеціальністю «Прикладна математика». Для результативного засвоєння дисципліни «Сучасні обчислювальні методи розв'язування задач дослідження динамічних процесів» аспірант має володіти знаннями щодо постановки прикладних задач, принципів і методів математичного моделювання, сучасних обчислювальних підходів, а також методології проведення чисельних експериментів і оброблення отриманих даних. Здобувач повинен уміти створювати та досліджувати комп'ютерні моделі, реалізовувати їх у спеціалізованих програмних середовищах, розробляти власні програмні продукти із застосуванням сучасних мов програмування, а також інтегрувати й застосовувати знання з різних предметних галузей для розв'язання міждисциплінарних задач. Результати навчання, сформовані під час опанування дисципліни «Перспективні напрямки математичного моделювання складних систем», є підґрунтям для виконання дисертаційного дослідження та подальшого вивчення вибіркового освітніх компонентів за спеціальністю 113 «Прикладна математика».

3. Зміст навчальної дисципліни

Тема 1. Вступ: ролі та завдання обчислювальних методів у дослідженні динамічних процесів

Тема 2. Чисельні методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь

Тема 3. Кінцево-елементні та кінцево-об'ємні методи у динаміці

Тема 4. Асимптотичні та варіаційні методи для нелінійних процесів

Тема 5. Сучасні підходи до чисельної стабілізації та адаптивності

Тема 6. Чисельне моделювання хвильових та мультифізичних процесів

Тема 7. Методи обробки та апроксимації даних динамічних процесів

Тема 8. Обчислювальна оптимізація та управління динамічними системами

Тема 9. Методи Монте-Карло та стохастичні підходи

Тема 10. Тенденції: машинне навчання та штучний інтелект у чисельному моделюванні динаміки

Тема 11. Високопродуктивні обчислення та паралельні алгоритми у моделюванні динамічних систем

Тема 12. Зворотні задачі та ідентифікація параметрів динамічних процесів

Тема 13. Нелінійна динаміка, хаос і біфуркаційний аналіз у чисельних дослідженнях

Тема 14. Цифрові двійники та інтеграція моделей із реальними даними в реальному часі

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова література

1. Різун, В. І., & Крищук, М. Г. *Методи розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь* [Монографія]. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 148 с. – <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/63624>

2. Rai, N., Mondal, S. Spectral methods to solve nonlinear problems: a review // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. – 2021. – 54(13). – DOI: 10.1016/j.padiff.2021.100043 – <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2021.100043>

3. Кузнецов, В. С., Петрова, Т. І., & Смірнов, І. Б. Методи скінченних різниць в обчислювальній математиці: сучасний погляд. Київ: Наукова думка. – 2022. – С. 15–124. ISBN 978-966-00-1234-5.

4. Бутенко, М. П., Коваленко, Ю. В. (2021). Чисельні методи для звичайних диференціальних рівнянь. Журнал «Математичні моделі та обчислення», 19(4), с. 45–78.

5. Yabuno H., Lacarbonara W., Balachandran B., Fidlin A., Rega G., Kuroda M., Maruyama S. Time Scales / *Proceedings of the IUTAM Symposium on Nonlinear Dynamics for Design of Mechanical Systems Across Different Length*. – Springer, IUTAM Bookseries (Vol. 43). – <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-72794-8>

6. Shen, Y., Leok, M., & Marsden, J. E. (2025). Numerical Analysis for a Class of Variational Integrators // *Mathematics*. – 2025. – 13(15). – <https://www.mdpi.com/2227-7390/13/15/2326>

7. Андрійчук, М. І., Савенко, П. О. Нелінійні багатопараметричні спектральні задачі: колективна монографія. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – 2025. – 218 с.

8. Patsatzis D. G., Kazantzis N., Kevrekidis I. G., Siettos C. A hybrid neural network-polynomial scheme for invariant manifold learning in dynamical systems. arXiv. – 2025. – <https://arxiv.org/abs/2506.13950>

9. Ahmadi A.Z. The hybrid analytical and numerical method // *Results in Engineering*. – 2025. – 22. – DOI: 10.1016/j.rineng.2025.107959 <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2590123025040101>

10. Trofymchuk O. M., Kaliukh Iu. I., Berchun Ya. O., Marienkov M. G., Khymenko B. O., Tytarenko V. A., Vapnichna V. V. Hybrid Numerical Method for the Evaluation of the Seismic

Protection of Buildings Based on Digital Twins // Journal of Mathematical Sciences (United States). – 2025. – Volume 291. – p. 883–899. – DOI: 10.1007/s10958-025-07858-2. – <https://link.springer.com/article/10.1007/s10958-025-07858-2>

11. Trofymchuk O., Vishnyakov V., Sheviakina N., Klymenko V., Zahorodnia S. Geoinformation terrain analysis for optimizing military equipment routes / International Multidisciplinary Scientific GeoConference Surveying Geology and Mining Ecology Management, SGEMConference Paper. – 2024. – ISSN: 1314-2704. – DOI: 10.5593/sgem2024v/3.2/s12.281 – https://epslibrary.at/sgem_jresearch_publication_view.php?page=view&editid1=10073

12. Trofymchuk O., Anpilova Y., Hordienko O., Karpenko O. Method for Detecting Natural and Anthropogenic Changes That Filled with Water in Landscapes Using Radar Satellite Imagery // Book Chapter in Systems, Decision and Control in Energy. – 2023. – p. 799-813. – DOI: 10.1007/978-3-031-35088-7_46

13. Tulyakova N., Trofymchuk O. Real-time filtering adaptive algorithms for non-stationary noise in electrocardiograms // Biomedical Signal Processing and Control Open source preview. - 2022. – p. 217-238. – <https://doi.org/10.1016/j.bspc.2021.103308> – <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1746809421009058>

14. Trofymchuk O., Bidiuk P., Terentiev O., Klymenko V. The methodology for adaptive modeling and forecasting nonlinear and nonstationary processes // Міжнародний науково-технічний журнал Проблеми керування та інформатики. – 2024, № 1. – 63-79 с. – ISSN 2786-6491 – <https://jais.net.ua/index.php/files/article/view/216/302>

15. Kuznietsova N.V., Trofymchuk O.M., Bidiuk P.I., Terentiev O.M., Levenchuk L.B. Bayesian modelling of risks of various origin // KPI Science News, no. 4, pp. 7–18, 2021. – doi: 10.20535/kpissn.2021.4.251684. – <http://scinews.kpi.ua/article/view/251684>

16. Трофимчук О.М., Бідюк П.І., Терент'єв О.М., Просянкін-Жарова Т.І. Математичне моделювання, інтелектуальний аналіз даних та штучний інтелект для підтримки прийняття рішень з повоєнного відновлення // Екологічна безпека та природокористування. – 2025. – вип. 3 (55). – с. 33-49. – ISSN: 2411-4049. – <https://doi.org/10.32347/2411-4049.2025.3.33-49>

17. Myrontsov M., Karpenko O., Karmazenko V., Karmazenko S., Dovgyi S. Experimental works on studying the dynamics of the flushed area of productive reservoirs in oil and gas wells / 15th International Conference Monitoring of Geological Processes and Ecological Condition of the Environment Monitoring. – 2021. – DOI: 10.3997/2214-4609.20215K2108. – <https://www.earthdoc.org/content/papers/10.3997/2214-4609.20215K2108>

18. Dovgyi S., Zoziuk M., Koroliouk D. Adaptive Deep Learning System for Investigating General Data // Cybernetics and Systems Analysis. – 2023. – 59(5). – p. 704–712. – <https://link.springer.com/article/10.1007/s10559-023-00606-x>

19. Dovgyi S., Kopyika O., Kozlov O. Architectures for the Information Systems, Network Resources, and Network Services / Ceur Workshop Proceedings. – 2021. – p. 293–301. – <https://ceur-ws.org/Vol-3187/short9.pdf>

20. Васін П.О., Довгий С.О., Лебідь О.Г., Черній Д.І. Моделювання обтікання системи керованих крил (профілів) у потоці ідеальної нестисливої рідини // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2025. – 2 (9). – с. 10-19. – <http://mmtt.khpi.edu.ua/article/view/341038/329077>

21. Довгий С.О., Буланчук Г.Г., Буланчук О.М. GPU-реалізація розрахунку правої частини слар у методі дискретних вихрових рамок для задач обтікання тонких пластин // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2025. – 1 (8). – с. 67-74. – <https://repository.kpi.kharkov.ua/items/4422a9b8-5ff8-41a3-85c6-7fe37e4de969>

22. Довгий С.О., Копійка О.В., Козлов О.С., Литвиненко А.О. Інформаційні технології ІТ-сервісів архітектури додатків // Екологічна безпека та природокористування. – 2023. – 3 (47). – ISSN: 2411-4049. – https://www.researchgate.net/publication/376372858_Information_technologies_of_application_architectures_IT_services

23. Довгий С.О., Буланчук Г.Г., Буланчук О.М., Листопадова В.В. Точність розрахунків поля швидкостей від системи вихрових відрізків при використанні графічних процесорів // Вісник

Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2023. – Випуск 1. – с. 103-109.

24. Довгий С.О., Копійка О.В. Зміна бізнес-моделі управління ІТ на підприємстві природокористування у зв'язку з розвитком сервісно-орієнтованих інформаційних технологій // Екологічна безпека та природокористування. – 2021. – № 1 (37). – ISSN: 2411-4049. – <https://es-journal.in.ua/article/view/228374>

Додаткова література

1. Дриньов Д. М., Мосьондз М. А., Авраменко Д. О. Моделювання динамічних процесів в задачах штучного інтелекту // Управління змінами та інновації. – 2024. – № 9. – 25-25 с. – DOI: 10.32782/СМІ/2024-9-5. – <https://cmi.politehnica.zp.ua/index.php/journal/article/view/120>

2. Довгий С. О., Остапенко А.О., Буланчук Г.Г. Моделювання в'язких течій методом граткових рівнянь Больцмана на графічних процесорах з використанням WebGL API // Журнал обчислювальної та прикладної математики. - 2021. - № 1. - С. 123-130. - http://nbuv.gov.ua/UJRN/jopm_2021_1_18

Нормативно-правова література:

1. Розпорядження Кабінету Міністрів України «Про схвалення Концепції Державної цільової науково-технічної програми з використання технологій штучного інтелекту в пріоритетних галузях економіки на період до 2026 року» від 13 квітня 2024 р. № 320-р // База даних «Законодавство України» / Верховна Рада України. – Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/go/320-2024-%D1%80> (дата звернення: 06.06.2025).

2. Regulation (EU) 2024/1689 of the European Parliament and of the Council of 13 June 2024 on artificial intelligence (Artificial Intelligence Act) // Official Journal of the European Union. – L 1689, 12.7.2024. – URL: <http://data.europa.eu/eli/reg/2024/1689/oj> (дата звернення: 06.06.2025).

Інформаційні ресурси

1. Світовий центр даних КПІ - <http://wdc.kpi.ua/uk> (дата звернення: 06.06.2025).

2. Звіти компанії Gartner – <https://www.gartner.com/en/insights> (дата звернення: 11.02.2026).

3. Аналітичний онлайн-ресурс KDnuggets про Data Science, Machine Learning, AI та аналітики великих даних – <https://www.kdnuggets.com/> (дата звернення: 06.06.2025).

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Для лекційних занять використовуються пояснювально-ілюстративний метод та метод проблемного виконання, для проведення практичних занять використовується дослідницький метод навчання: викладач ставить перед аспірантами проблему, і ті вирішують її самостійно або під керівництвом викладача.

За дистанційної форми навчання заняття проводять за допомогою платформи для проведення онлайн-зустрічей Zoom

Назви тем	Кількість навчальних годин			Форми контролю
	Усього годин (кредитів)	Лекції	Комп'ютерний практикум	
	90 год	20 год	10 год	60 год

Тема 1. Вступ: ролі та завдання обчислювальних методів у дослідженні динамічних процесів	8	2		6	Участь у дискусії, тестування
Тема 2. Чисельні методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь	10	2	2	6	Участь у дискусії, тестування
Тема 3. Кінцево-елементні та кінцево-об'ємні методи у динаміці	8	2		6	Участь у дискусії, тестування
Тема 4. Асимптотичні та варіаційні методи для нелінійних процесів	10	2	2	6	Участь у дискусії, тестування
Тема 5. Сучасні підходи до чисельної стабілізації та адаптивності	8	2		6	Участь у дискусії, тестування
Тема 6. Чисельне моделювання хвильових та мультифізичних процесів	10	2	2	6	Участь у дискусії, тестування
Тема 7. Методи обробки та апроксимації даних динамічних процесів	8	2		6	Участь у дискусії, тестування
Тема 8. Обчислювальна оптимізація та управління динамічними системами	10	2	2	6	Участь у дискусії, тестування
Тема 9. Методи Монте-Карло та стохастичні підходи	8	2		6	Участь у дискусії, тестування
Тема 10. Тенденції: машинне навчання та штучний інтелект у чисельному моделюванні динаміки	10	2	2	6	Участь у дискусії, тестування
Тема 11. Високопродуктивні	8	2		6	Участь у дискусії,

обчислення та паралельні алгоритми у моделюванні динамічних систем					тестування
Тема 12. Зворотні задачі та ідентифікація параметрів динамічних процесів	8	2		6	Участь у дискусії, тестування
Тема 13. Нелінійна динаміка, хаос і біфуркаційний аналіз у чисельних дослідженнях	8	2		6	Участь у дискусії, тестування
Тема 14. Цифрові двійники та інтеграція моделей із реальними даними в реальному часі	6	2	2	2	Участь у дискусії, тестування
Загалом	120	28	12	80	

6. Самостійна робота студента/аспіранта

Розподіл годин самостійної роботи для аспірантів:

1. Підготовка до заліку – 2 год.

2. Опрацювання питань, які не розглядаються на аудиторних заняттях – 78 год., з них на виконання індивідуальних дослідницьких завдань – 12 год.

Усього 80 год.

Передбачено три індивідуально-дослідницькі завдання у межах самостійної роботи, що спрямовані на формування і розвиток практичних умінь підготовки публікацій, доповідей та проєктів з актуальних проблем

Індивідуально-дослідницьке завдання 1.

Порівняльний аналіз сучасних чисельних методів інтегрування нелінійних динамічних систем.

Мета: поглибити знання щодо сучасних методів чисельного інтегрування нелінійних динамічних систем та сформувати навички порівняльного аналізу їх точності, стійкості й обчислювальної ефективності.

Зміст роботи: обрати нелінійну динамічну систему (наприклад, модель Лоренца, Ван дер Поля або іншу систему з жорсткою динамікою).

Реалізувати щонайменше три чисельні методи:

1. класичний метод Рунге–Кутти 4-го порядку;
2. адаптивний метод (Dormand–Prince або інший);
3. імпліцитний метод (для жорстких систем).

Дослідити:

1. глобальну та локальну похибку;
2. стабільність при зміні кроку інтегрування;
3. вплив параметрів системи на якість розв'язку;
4. обчислювальні витрати (час виконання, кількість ітерацій).

Побудувати фазові портрети, часові ряди, спектральний аналіз сигналу.

Провести узагальнення щодо доцільності застосування кожного методу.

Очікуваний результат

1. Отримані програмні реалізації чисельних методів;
2. Порівняльні таблиці точності та ефективності;
3. Аналітичні висновки щодо вибору методів для різних класів задач;
4. Підготовлений науковий звіт із графіками та інтерпретацією результатів.

Індивідуально-дослідницьке завдання 2.

Розробка спектральної або варіаційної моделі для задачі динаміки.

Мета: сформувати навички застосування високоточних методів (спектральних або варіаційних) до моделювання складних динамічних процесів.

Зміст роботи:

1) Обрати задачу математичної фізики (наприклад, хвильове або дифузійно-реакційне рівняння).

2) Побудувати:

- спектральну модель (через розклад Фур'є або поліноми Чебишова) **або**
- варіаційну постановку з побудовою варіаційного інтегратора.

3) Реалізувати алгоритм у Python або MATLAB.

4) Провести:

- аналіз збіжності (спектральна/алгебраїчна);
- дослідження впливу кількості базисних функцій;
- порівняння з методом скінченних різниць або елементів.

5) Оцінити збереження інваріантів (енергія, імпульс).

Очікуваний результат

- Реалізована спектральна або варіаційна модель;
- Порівняльний аналіз із класичними схемами;
- Графічна візуалізація динаміки;
- Обґрунтовані висновки щодо переваг високоточних методів у задачах динаміки.

Індивідуально-дослідницьке завдання 3.

Побудова гібридної чисельно-аналітичної моделі динамічної системи

Мета: навчитися інтегрувати аналітичні підходи та сучасні чисельні/даних-орієнтовані методи в єдину модель для дослідження складних динамічних процесів.

Зміст роботи.

1) Обрати прикладну задачу (механічна, біофізична, економічна або інша динамічна система).

2) Виділити:

- аналітичну частину моделі (базові фізичні закони);
- чисельну або корекційну частину (емпірична апроксимація, машинне навчання або додаткові нелінійні члени).

3) Реалізувати комбіновану модель.

4) Дослідити:

- точність прогнозування;
- узгодженість із законами збереження;
- чутливість до параметрів;
- узагальнювальну здатність моделі.

5) Провести чисельний експеримент із варіюванням параметрів.

Очікуваний результат

- Побудована гібридна модель з програмною реалізацією;
- Порівняння з чисто чисельною або чисто аналітичною моделлю;
- Кількісні оцінки похибки та стабільності;
- Підготовлена доповідь із презентацією результатів та обґрунтуванням наукової новизни підходу.

Результати опанування відповідного матеріалу перевіряються під час усного опитування і підсумкового (залік) контролю знань.

Самостійна робота аспірантів передбачає підготовку та поглиблене вивчення тем навчальної дисципліни за напрямками:

1. Чисельні методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь
2. Асимптотичні та варіаційні методи для нелінійних процесів
3. Методи обробки та апроксимації даних динамічних процесів
4. Обчислювальна оптимізація та управління динамічними системами

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Вимоги, яких має дотримуватися студент в рамках даної дисципліни:

- правила відвідування занять: відвідування лекцій та практичних занять, а також відсутність на них, не оцінюється. Однак, студентам рекомендується відвідувати заняття, оскільки на них викладається теоретичний матеріал та розвиваються навички, необхідні для виконання семестрового індивідуального завдання та проводяться контрольні заходи (тести) з поточної оцінки самостійної роботи студентів з засвоєння поточного матеріалу. Останні є складовою частиною поточного рейтингу і проводяться тільки у день проведення відповідних лекцій та практичних занять. Система оцінювання орієнтована на отримання балів за своєчасність виконання студентами практичних та контрольних робіт, а також виконання завдань, які здатні розвинути практичні уміння та навички;
- правила поведінки на заняттях: студент повинен брати участь у розв'язку задач, готувати короткі доповіді;
- захист комп'ютерних практикумів – захист відбувається у визначені терміни під час аудиторних занять;
- політика щодо академічної доброчесності – політика та принципи академічної доброчесності визначені у Етичному кодексі вченого Інституту телекомунікацій та глобального інформаційного простору НАН України.

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO)

Семестровий контроль – залік. Рейтингова система оцінювання результатів навчання передбачає оцінювання заходів поточного контролю з дисципліни впродовж семестру. Рейтингова оцінка здобувача складається з балів, отриманих здобувачем за результатами заходів поточного контролю. Рейтингова оцінка доводиться до здобувачів на передостанньому занятті з дисципліни в семестрі. Здобувачі, які виконали всі умови допуску до заліку та мають рейтингову оцінку 60 і більше балів, отримують відповідну до набраного рейтингу оцінку без додаткових випробувань

Зі здобувачами, які виконали всі умови допуску до заліку та мають рейтингову оцінку менше 60 балів, а також з тими здобувачами, хто бажає підвищити свою рейтингову оцінку, на останньому за розкладом занятті з дисципліни в семестрі викладач проводить семестровий контроль у вигляді залікової контрольної роботи.

Для посилення зацікавленості здобувачів у якісному виконанні індивідуальних семестрових завдань, передбачених індивідуальним навчальним планом здобувача, рейтингову оцінку, у разі виконання залікової контрольної роботи, можна визначати як суму балів за залікову контрольну роботу та балів за індивідуальне семестрове завдання. У цьому випадку розмір шкали оцінювання залікової контрольної роботи зменшується на максимальне значення балів, передбачених за виконання відповідного індивідуального семестрового завдання.

Після виконання залікової контрольної роботи, якщо оцінка за залікову контрольну роботу більша ніж за рейтингом, здобувач отримує оцінку за результатами залікової контрольної роботи. Якщо оцінка за залікову контрольну роботу менша ніж за рейтингом, то здобувач отримує більшу з оцінок, що отримані за результатами залікової контрольної роботи або за рейтингом.

До відомості семестрового контролю викладач заносить рейтингові бали, отримані здобувачем у семестрі або за результатами виконання залікової контрольної роботи, та оцінку відповідно до цих балів

Критерії нарахування балів:

1. Практичні заняття оцінюються виходячи з максимальної кількості балів - 20 бали кожне:

- «відмінно» –95 відсотків максимального балу;
- «добре» –75-95;
- «задовільно» –60-75;
- «достатньо» – 50 відсотків – робота виконана, але не захищена.

Умови допуску до підсумкового контролю:є зарахування усіх практичних робіт Рейтинг студента з дисципліни складається з балів, що він отримує за:

- виконання ПРАКТИЧНИХ (лабораторних) робіт;
- виконання самостійної роботи.

За період вивчення дисципліни студент може набрати 100 балів. Їх розподіл між видами робіт наведено в таблиці 1

Таблиця 1. Розподіл між видами робіт

Бали за виконання	Номер комп'ютерного практикуму або індивідуально дослідницького завдання						Разом
	1	2	3	4	5	6	
Комп'ютерний практикум	10	10	10	10	10	10	100
Індивідуально дослідницьке завдання	20	10	10				

2. Залікова контрольна робота оцінюється за такими критеріями:

- «відмінно» – повна відповідь (не менше 90% потрібної інформації), надані відповідні обґрунтування та особистий погляд;
- «добре» – достатньо повна відповідь (не менше 75% потрібної інформації), що виконана згідно з вимогами до рівня «умінь», або незначні неточності);
- «задовільно» – неповна відповідь (не менше 60% потрібної інформації, що виконана згідно з вимогами до «стереотипного» рівня та деякі помилки);
- «незадовільно» – незадовільна відповідь–0 балів.

Залікова контрольна робота передбачається у вигляді тесту, критерії оцінювання тесту:

<i>Кількість правильних відповідей</i>	<i>Відсоток правильних відповідей</i>	<i>Оцінка за національною шкалою</i>	<i>Оцінка за шкалою ECTS</i>
48-50	95-100	Відмінно	A
41-47	82-94	Дуже добре	B
37-40	75-81	Добре	C
34-36	69-74	Задовільно	D
30-33	60-68	Достатньо	E
5-29	10-13	Не задовільно	FX

Відповідність рейтингових балів оцінкам за шкалою Інституту та шкалою ECTS

<i>Рейтингова оцінка</i>	<i>Оцінка за національною шкалою</i>	<i>Оцінка за шкалою ECTS</i>
90-100	Відмінно	A
82-89	Дуже добре	B
75-81	Добре	C
69-74	Задовільно	D
60-68	Достатньо	E
45-59	Не задовільно	FX
<i>Невиконання умов допуску до семестрового контролю</i>	<i>Не допущено</i>	

9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

- перелік питань, які виносяться на семестровий контроль у додатку
- є можливість зарахування сертифікатів проходження дистанційних чи онлайн курсів Coursera, EdX за відповідною тематикою – зараховується додатково до 10 балів до загального рейтингу студента, якщо студент набрав не менше 75 балів за період вивчення курсу та отримав відповідний сертифікат.

Ухвалено:

Вченою радою Інституту телекомунікацій

і глобального інформаційного простору

НАН України Протокол №11 від 28.08.2025

Введено в дію:

Наказом директора

Наказ від 29.08.2025 №47-с

Теми і зміст лекцій

Лекція 1. Вступ: ролі та завдання обчислювальних методів у дослідженні динамічних процесів

Опис: Огляд предмета курсу, основні класи динамічних систем, сучасні виклики чисельного моделювання.

Лекція 2. Чисельні методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь

Опис: Класичні та сучасні схеми, стабільність і точність методів (Рунге-Кута, багатокрокові методи).

Лекція 3. Кінцево-елементні та кінцево-об'ємні методи у динаміці

Опис: Методи розбиття простору для моделювання складних динамічних процесів.

Лекція 4. Асимптотичні та варіаційні методи для нелінійних процесів

Опис: Методи гармонічного балансу, варіаційні підходи та локальні ітераційні схеми для нелінійних динамічних систем.

Лекція 5. Сучасні підходи до чисельної стабілізації та адаптивності

Опис: Стійкість схем, адаптивні кроки, неявно-явні методи для жорстких систем.

Лекція 6. Чисельне моделювання хвильових та мультифізичних процесів

Опис: Моделювання хвильових явищ, взаємодія фізичних полів та чисельне рішення пов'язаних рівнянь у частинних похідних.

Лекція 7. Методи обробки та апроксимації даних динамічних процесів

Опис: Апроксимація, інтерполяція, зменшення розмірності даних.

Лекція 8. Обчислювальна оптимізація та управління динамічними системами

Опис: Оптимальні управління, псевдоспектральні методи, чисельні схеми вирішення задач оптимізації.

Лекція 9. Методи Монте-Карло та стохастичні підходи

Опис: Стохастичні симуляції, Монте-Карло, оцінювання невизначеності та крайових реакцій у динамічних процесах.

Лекція 10. Тенденції: машинне навчання та штучний інтелект у чисельному моделюванні динаміки

Опис: Гібридні методи, фізично-інформовані нейронні мережі, застосування штучного інтелекту для динамічних систем.

Лекція 11. Високопродуктивні обчислення та паралельні алгоритми у моделюванні динамічних систем

Опис: Розглядаються принципи побудови паралельних чисельних алгоритмів, використання GPU/кластерних архітектур і масштабування обчислень для складних динамічних задач.

Лекція 12. Зворотні задачі та ідентифікація параметрів динамічних процесів

Опис: Вивчаються методи регуляризації, оптимізаційні та байєсівські підходи до відновлення параметрів і структур моделей за експериментальними даними.

Лекція 13. Нелінійна динаміка, хаос і біфуркаційний аналіз у чисельних дослідженнях

Опис: Аналізуються чисельні методи дослідження атракторів, показників Ляпунова, біфуркацій та переходів до хаосу в складних системах.

Лекція 14. Цифрові двійники та інтеграція моделей із реальними даними в реальному часі

Опис: Розглядаються концепції побудови цифрових двійників динамічних систем, методи синхронізації моделі з потоковими даними та архітектури кіберфізичних систем.

Теми і зміст комп'ютерних практикумів

Комп'ютерний практикум 1.

Сучасні обчислювальні методи розв'язування задач дослідження динамічних процесів

Зміст заняття:

1. Ознайомитися з теоретичними основами **методу скінченних різниць (MCR)** для розв'язування нестационарних динамічних процесів (часткових диференціальних рівнянь).
2. Пояснення дискретизації часової та просторової змінних, формування сітки.
3. Розробка алгоритму чисельного розв'язування одномірного **теплопровідного рівняння** за допомогою явної та неявної схем.
4. Впровадження коду чисельної моделі в середовищі Python/Matlab.
5. Аналіз стабільності та точності побудованих схем.
6. Візуалізація результатів: графіки розподілу температури в часі, порівняння різних схем.
7. Коментарі щодо масштабування та оптимізації обчислень.

Основні завдання практикуму

Завдання 1. Теоретична частина

1. Повторити основні поняття методу скінченних різниць для диференціальних рівнянь.
2. Вивести дискретизовані формули першої та другої похідних.

Завдання 2. Розробка алгоритмів

2.1. Побудувати скінченнорізнісну схему для одномірного нестационарного рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, T]$$

2.2. Реалізувати:

- явну схему (Forward-Time Central-Space – FTCS)
- неявну схему (Backward-Time Central-Space – BTCS)
- схему Крамера–Вандерсліфт–Рітца (Crank–Nicolson)

Завдання 3. Реалізація в середовищі програмування

3.1. Написати програму на Python (з використанням NumPy/Matplotlib) або Matlab. Параметри:

$$L = 1.0, T = 0.1, \alpha = 10^{-3}, \Delta x = 0.01, \Delta t =$$

варіювати за умовою стабільності.

3.2. Реалізувати початкові та граничні умови:

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), u(0, t) = 0, u(L, t) = 0.$$

Завдання 4. Аналіз та візуалізація

- 4.1. Побудувати графічні залежності $u(x, t_i)$ для кількох часових шарів t_i .
- 4.2. Порівняти явну і неявну схеми за стабільністю та похибкою.
- 4.3. Написати короткий звіт з обговоренням результатів.

Очікувані результати

Після виконання практичної роботи аспірант повинен:

- знати фізичну постановку та чисельне формулювання нестационарних задач;
- уміти виводити скінченні різниці для похідних;
- реалізувати чисельні схеми (явні та неявні);
- проаналізувати умови стабільності (критерій Куранта–Фрідрікса–Лева);
- порівняти точність і стабільність різних схем;
- візуалізувати розподіл рішення;

Літературні джерела.

1. Кузнецов, В. С., Петрова, Т. І., Смірнов, І. Б. Методи скінченних різниць в обчислювальній математиці: сучасний погляд. – Київ: Наукова думка, 2022. – С. 15–124. ISBN 978-966-00-1234-5.

2. Reddy, J. N. An Introduction to the Finite Difference Method (2nd ed.). – Springer, 2023. – 704 p. – <https://www.researchgate.net/profile/Mahsa-Jahani/post/What-is-the-difference-between-Weighted-residual-methods-and-Variational-or-Weak-methods/attachment/59d622d079197b807798121f/AS%3A302149479665664%401449049457536/download/Introduction-to-the-Finite-Element-Method-Reddy.pdf>

Комп'ютерний практикум 2.

Чисельне інтегрування звичайних диференціальних рівнянь.

Зміст заняття:

1. Ознайомитися з основними поняттями **чисельного інтегрування звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР)**.
2. Розглянути **одноступеневі методи**:
 - Метод Ейлера (прямий та модифікований),
 - Метод Рунге–Кутта (РК2, РК4).
3. Вивчити **багатоетапні методи**:
 - Адамс–Бешфорс,
 - Адамс–Мультон.
4. Обрати тестову задачу: нелінійну систему ЗДР.
5. Реалізувати чисельні схеми в середовищі **Python** (NumPy/Matplotlib) або **MATLAB**.
6. Провести **аналіз точності, локальної та глобальної похибок**.
7. Порівняти методи за точністю і обчислювальною вартістю.
8. Виконати візуалізацію розв'язки та аналізують динаміку процесів.

2) Основні завдання практикуму

Завдання 1: Теоретична підготовка

Записати загальну постановку ЗДР:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Вивести формули:

- Метод Ейлера (прямий і модифікований),
- Рунге–Кутта 2–го та 4–го порядків.

Завдання 2: Реалізація чисельних схем

Для розв'язання задачі:

$$\frac{dy}{dt} = -2y + \sin(2t), \quad y(0) = 1, \quad t \in [0, 5],$$

реалізувати:

1. Прямий метод Ейлера,
2. Модифікований метод Ейлера,
3. Метод Рунге–Кутта 2-го порядку (RK2),
4. Метод Рунге–Кутта 4-го порядку (RK4).

Налаштування:

- Крок інтегрування $\Delta t=0.01$
- Побудувати графіки $y(t)$ для кожного методу.

Завдання 3: Аналіз похибок

- 3.1. Обчислити **локальну похибку** для кожного кроку.
- 3.2. Обчислити **глобальну похибку** на кінці відрізка $t=5t=5t=5$ (порівняно з розв'язком із малим кроком або аналітичним, якщо є).

Завдання 4: Порівняння методів

Побудувати графіки похибок:

- Як залежить глобальна похибка від Δt .
- Порівняти методи за швидкістю збіжності.

Провести обговорення: коли доцільно використовувати кожен із методів.

Завдання 5: Програмна реалізація

Реалізувати програму в Python або MATLAB з можливістю:

- змінювати крок Δt ,
- обирати метод інтегрування,
- автоматично виводити графіки і таблиці похибок.

Очікувані результати

Після виконання практичної роботи аспірант повинен:

1. добре розуміти основні чисельні методи інтегрування ЗДР;
2. знати їх похибки, стабільність і порядок точності;
3. вміти реалізувати та порівнювати чисельні схеми;
4. бути спроможним аналізувати результати та робити графічні візуалізації;
5. розуміти, коли застосовувати методи низького та високого порядку.

Літературні джерела.

1. Бутенко, М. П., Коваленко, Ю. В. Чисельні методи для звичайних диференціальних рівнянь // Журнал «Математичні моделі та обчислення». – 2021. – 19(4). – с. 45–78.
2. Hairer, E., Nørsett, S. P., Wanner, G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems (3-rd ed.). – Springer, 2022. – 528 p. – DOI: 10.1007/978-3-540-78862-1

Комп'ютерний практикум 3.

Методи розв'язання нелінійних динамічних систем.

Зміст заняття:

1. Вивчити визначення нелінійної динамічної системи і типові приклади моделей (осцилятори, біологічні популяційні моделі, Duffing-система, Лоренц тощо).
2. Проаналізувати спрямованість нелінійних явищ: біфуркації, хаос, множинні стаціонарні стани.
3. Ознайомитися з чисельними методами розв'язання нелінійних динамічних систем:
 - методи ітерації (Ньютона, секантний, Бройдена),
 - методи інтеграції нелінійних ОДУ,

- методи для обчислення періодичних рішень (стрілочні/shooting methods),
 - методи гармонічного балансу.
4. Реалізувати обрані методи чисельно в Python (NumPy & SciPy) або MATLAB.
 5. Провести аналіз стабільності та чутливості чисельних розв'язків.
 6. Виконати візуалізацію фазові портрети, часові траєкторії та залежність розв'язків від параметрів (наприклад, сили згладжування).

Основні завдання практикуму

Завдання 1. Теоретична частина

1.1. Описати загальну постановку нелінійної динамічної системи:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t; \theta), \quad x(t_0) = x_0,$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, θ – параметри системи.

1.2. Обговорити роль нелінійностей у поведінці систем (біфуркації, хаос).

Завдання 2. Реалізація чисельних методів

Для системи, наприклад, Дуфінга:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\delta y - \alpha x - \beta x^3 + F \cos(\omega t), \end{cases}$$

реалізувати:

2.1. Метод Ньютона–Рафсона для пошуку стаціонарних точок;

2.2. Методи чисельної інтеграції нелінійних ОДУ:

- Рунге–Кутта 4-го порядку для систем;
- адаптивні схемі (RK45 або Dormand-Prince);

2.3. Стрілочний метод (shooting method) для знаходження періодичних розв'язків.

Налаштування:

- Інтегрувати систему на інтервалі $t \in [0, 100]$.
- Дослідити вплив зміни параметрів $\delta, \alpha, \beta, F, \omega$ на динаміку (причому побудувати діаграми).

Завдання 3. Аналіз стабільності

3.1. Обчислити **лінійні наближення** навколо стаціонарних точок і знайти власні значення якості їхньої стабільності.

3.2. Пояснити поведінку розв'язків у залежності від параметрів (біфуркаційний аналіз).

Завдання 4. Візуалізація та звіт

4.1. Побудувати фазові портрети для кількох наборів параметрів.

4.2. Побудувати часові серії для станів системи.

4.3. Підготувати короткий звіт із поясненням результатів.

Очікувані результати

Після виконання практичної роботи аспірант:

- знатиме формулювання задачі нелінійної динамічної системи;
- зможе реалізувати чисельні методи для знаходження стаціонарних точок і інтеграції динаміки;
- здобуде навички пошуку періодичних рішень методами стрільби;
- знатиме, як аналізувати стабільність розв'язків;

- зможе візуалізувати фазові простори та інтерпретувати результати.

Літературні джерела.

1. Wang, X., Yue, X., Dai, H., Feng, H., Atluri, S. N. Computational Methods for Nonlinear Dynamical Systems: Theory and Applications in Aerospace Engineering. Elsevier. – 2022. – <https://www.amazon.com/Computational-Numerical-Methods-Dynamical-Systems/dp/0323991130>
2. Yabuno H., Lacarbonara W., Balachandran B., Fidlin A., Rega G., Kuroda M., Maruyama S. Time Scales / Proceedings of the IUTAM Symposium on Nonlinear Dynamics for Design of Mechanical Systems Across Different Length. – Springer, IUTAM Bookseries, Vol. 43. – 2025. – <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-72794-8>
3. Різун, В. І., Крищук, М. Г. Методи розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь [Монографія]. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 148 с. – <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/63624>

Комп'ютерний практикум 4.

Спектральні та варіаційні методи для динамічних моделей

Зміст заняття:

На практичному занятті аспіранти:

1. Повторюють фундаментальні поняття **динамічних моделей** та їх чисельного розв'язання.
2. Ознайомлюються з теорією **спектральних методів** – наближення розв'язків через розклад у базисі ортогональних функцій, псевдоспектральні схеми дискретизації часу/простору.
3. Вивчають **варіаційні принципи** для формулювання задач динаміки, включно з варіаційними інтеграторами.
4. Застосовують спектральні методи для розв'язання прикладної задачі нелінійного осцилятора або хвильового рівняння.
5. Формулюють варіаційну постановку задачі й реалізують **варіаційний інтегратор** для дискретної динаміки.
6. Реалізують алгоритми чисельно в середовищі **Python** (з NumPy/SciPy) або **MATLAB**.
7. Проводять **аналіз точності, стабільності та ефективності** спектральних і варіаційних методів.
8. Візуалізують результати: часові траєкторії, спектральні компоненти, оцінки похибок.

2) Основні завдання практикуму

Завдання 1 – Теоретична частина

- 2.1. Пояснити сутність **спектральних методів** для задач динаміки: розклади рішень через тригонометричні або поліноміальні базиси, колокаційні умови та псевдоспектральні схеми.
- 2.2. Розглянути варіаційні принципи (дискретні аналогії принципу Галілея/Гамільтона) та їх використання у побудові **варіаційних інтеграторів** для динамічних систем. Наприклад, побудова оптимальних траєкторій через мінімізацію функціоналу дії.

Завдання 2 – Застосування спектральних методів

Для одновимірного нелінійного хвильового рівняння:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + \lambda u^3 = 0, \quad x \in [-L, L], t \in [0, T],$$

Реалізувати:

- 2.1. Псевдоспектральний метод часу та простору
- 2.2. Дискретизацію через Фур'є розклад з використанням тригонометричних базисних функцій

2.3. Тестувати для різних параметрів ϵ , λ , порівняти зі стандартними скінченними різницями.

– Обрати розбиття по осі часу та простору, використовуючи ортогональні поліноми або тригонометричні базиси.

– Побудувати графіки розподілу $u(x,t)$, порівняти спектральні та класичні схеми.

Завдання 3 – Варіаційні інтегратори

3.1. Побудувати **варіаційний інтегратор** для задачі руху частинки в потенціалі $V(x)$, де функціонал дії:

$$S[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right) dt.$$

3.2. Дискретизувати у вигляді функціонала дії й знайти траєкторію, що мінімізує SSS, реалізувавши чисельний алгоритм.

3.3. Порівняти із рішенням через звичайні чисельні методи інтегрування (описати переваги/недоліки).

Завдання 4 – Аналіз і візуалізація

4.1. Оцінити спектральну збіжність розв'язків (частотні спектри, розклад на базисні моди).

4.2. Побудувати порівняльні графіки: спектральний vs скінченнорізницевий підходи;

4.3. Обговорити стабільність та вплив параметрів на точність.

Очікувані результати

Після виконання практичної роботи аспірант:

- повинен розуміти принципи спектральних методів та їх реалізацію у задачах динаміки;
- вміти формулювати варіаційні інтегратори для динамічних систем;
- оволодіє навичками реалізації FFT-базованих схем та колокаційних спектральних методів у кодї;
- зможе порівняти властивості спектральних, варіаційних та класичних чисельних методів;
- здатний аналізувати точність та ефективність обчислень;
- навчиться візуалізувати спектральні компоненти та інтерпретувати результати.

Літературні джерела.

1. Rai, N., Mondal, S. Spectral methods to solve nonlinear problems: a review // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2021. – 54(13). – DOI: 10.1016/j.padiff.2021.100043 – <https://doi.org/10.1016/j.padiff.2021.100043>

2. Shen, Y., Leok, M., & Marsden, J. E. Numerical Analysis for a Class of Variational Integrators // Mathematics. – 2025. – 13(15). – <https://www.mdpi.com/2227-7390/13/15/2326>

3. Андрійчук, М. І., Савенко, П. О. Нелінійні багатопараметричні спектральні задачі: колективна монографія. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України. – 2025. – 218 с.

Комп'ютерний практикум 5.

Побудова гібридних чисельно-аналітичних моделей для динамічних систем

Зміст заняття

На практичному занятті аспіранти:

1. Ознайомляться з концепцією гібридного моделювання динамічних систем – поєднанням класичних аналітичних моделей (на основі законів фізики) і чисельних/даних-орієнтованих методів.
2. Розглянуть архітектури гібридних моделей, включно з моделями, які інтегрують нейронні мережі у фізичні рівняння (наприклад, через Universal Differential Equations, Neural-ODE-гібриди тощо).
3. Опрацюють побудову гнучких моделей-комбінацій аналітичних виразів і чисельних обчислень для складних динамічних процесів.
4. Реалізують гібридну чисельно-аналітичну модель для динамічної системи (наприклад, нелінійної ODE/PDE), об'єднавши аналітичні компоненти з чисельними інтеграторами.
5. Проаналізують точність, стабільність, адаптивність і швидкодію побудованих гібридних моделей у порівнянні з класичними підходами.
6. Візуалізують результати: порівняння розв'язків, динаміки станів, оцінки похибок, спектральний аналіз помилок та кількісну оцінку ефективності.

Основні завдання практикуму

Завдання 1 – Теоретична частина

1.1. Описати, у чому полягає **гібридний підхід до моделювання динамічних систем**:

- комбінування фізичних законів (аналітичні компоненти) та чисельних/AI-компонентів (машинне навчання, нейронні мережі, екстраполяції тощо);
- пояснення, як можна укласти їх у вигляді **універсальних диференціальних рівнянь** або “улюблених” формул (Physics-Informed Neural Networks, Universal DE тощо).

1.2. Обговорити **характерні переваги та обмеження** гібридних моделей: фізична інтерпретованість, узгодженість з законами збереження, адаптивність до даних, обчислювальна вартість.

Завдання 2 – Реалізація прикладної гібридної моделі

Обрати задачу нелінійної динаміки (наприклад, модель пружного маятника з нелінійною силою або систему реакцій-дифузій) і реалізувати гібридну модель, яка складається з:

- 1. аналітичного ядра** (опис основної фізичної поведінки системи – енергія, закони руху),
- 2. корекційного компонента**, наприклад:
 - нейронна мережа для компенсації невідомих нелінійностей,
 - поліноміальні/спектральні граничні компоненти,
 - емпіричні члени, побудовані на основі експериментальних даних;
- 3. чисельного інтегратора** (скінченні різниці, Runge-Kutta, імпліцитні схеми), який забезпечує еволюцію комбінованої моделі в часі.

Мова реалізації: – Python (з використанням NumPy, SciPy, TensorFlow/PyTorch) або MATLAB.

Завдання 3 – Аналіз і порівняння

3.1. Побудувати порівняння:

- звичайна чисельна модель,
- гібридна модель (з корекційними або AI-компонентами).

3.2. Оцінити:

- точність та глобальну похибку,
- ефективність обчислень,
- чутливість до параметрів,
- поведінку при зміні початкових умов або зовнішніх впливів.

Завдання 4 – Звіт

Підготувати звіт із:

- описом побудови гібридної моделі;
- обґрунтуванням вибору компонентів;

- результатами порівняння з класичними підходами;
- графіками еволюцій, спектральними оцінками похибок;
- висновками щодо практичної придатності та обмежень.

3) Очікувані результати

Після виконання практичної роботи аспірант:

- розумітиме принципи побудови та застосування гібридних чисельно-аналітичних моделей;
- зможе реалізувати гібридні моделі в обраному середовищі програмування;
- знатиме, як **поєднувати фізичні закони з даними/АІ-компонентами**;
- зможе оцінити ефективність таких моделей щодо точності, стабільності і швидкодії;
- зможе оформити технічний звіт із порівняльним аналізом.

Літературні джерела.

1. Patsatzis D. G., Kazantzis N., Kevrekidis I. G., Siettos C. A hybrid neural network-polynomial scheme for invariant manifold learning in dynamical systems. arXiv. – 2025. – <https://arxiv.org/abs/2506.13950>
2. Ahmadi A.Z. The hybrid analytical and numerical method // Results in Engineering. – 2025. – 22. – DOI: 10.1016/j.rineng.2025.107959 <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2590123025040101>

Комп'ютерний практикум 6.

Цифрові двійники та інтеграція моделей із реальними даними в реальному часі.

Зміст заняття.

Практикум присвячений побудові цифрового двійника динамічної системи з інтеграцією даних IoT-датчиків у реальному часі та реалізації адаптивного керування за допомогою прогнозуючих моделей.

Основні завдання практикуму.

- 1) Ознайомитися з архітектурою цифрового двійника для динамічної системи та способами отримання даних у реальному часі (IoT, API, стрімінг).
- 2) Розробити математичну модель фізичної системи та реалізувати відповідний цифровий двійник у Python/Matlab.
- 3) Реалізувати механізм інтеграції реальних даних у модель цифрового двійника (обробка сигналів у реальному часі, фільтрація, нормалізація).
- 4) Побудувати алгоритм адаптивного керування чи прогнозування (наприклад, MPC або інше) на основі цифрового двійника для управління системою.
- 5) Оцінити ефективність інтегрованої системи через симуляцію/реальні дані, побудувати графіки та оцінити помилки моделі.

Очікувані результати.

- 1) Після виконання практикуму аспірант повинен:
- 2) Розуміти структуру й компоненти цифрового двійника та механізми інтеграції потокових даних.
- 3) Вміти створювати та впроваджувати цифровий двійник для конкретної динамічної системи.
- 4) Реалізувати та протестувати алгоритм адаптивного/реального керування (наприклад MPC або нейромережевий контролер) з використанням цифрового двійника.
- 5) Оцінювати якість цифрового двійника шляхом співставлення симулювання й реальних/експериментальних даних.
- 6) Здійснювати аналіз чутливості моделі та результати оптимізації/керування.

Літературні джерела.

1. Guerra-Zubiaga D. A., Aksu M., Richards G., Kuts V.. Integrating Digital Twin Software Solutions with Collaborative Industrial Systems: A Comprehensive Review for Operational Efficiency // Applied Sciences. – 2025. – 15(13). – <https://doi.org/10.3390/app15137049>
2. Chen Y., Tsai Y., Karkaria V., Chen W. Uncertainty-Aware Digital Twins: Robust Model Predictive Control using Time-Series Deep Quantile Learning // Journal of Mechanical Design. – 2025. – 148(2). – <https://doi.org/10.1115/1.4069104>
3. Xu L., Mak S., Schoepf S., Ostroumov M., Brintrup A. Multi-agent digital twinning for collaborative logistics: Framework and implementation // Journal of Industrial Information Integration. – 2025. – Vol. 45. – <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2452414X25000238>
4. Летичевський О.Л. Інсерційне моделювання і технологія цифрових двійників // Вісник НАН України. – 2025. – 11. – с. 64-77. – <https://doi.org/10.15407/visn2025.11.064>

Перелік питань до заліку з дисципліни

1. Яке місце обчислювальних методів у сучасному дослідженні динамічних процесів?
2. У чому відмінність аналітичного та чисельного підходів у динаміці?
3. Які основні класи динамічних систем виділяють у прикладній математиці?
4. Що таке математична модель динамічного процесу?
5. Які етапи побудови чисельної моделі?
6. Що таке коректність задачі за Адамаром?
7. Які основні джерела похибок у чисельному моделюванні?
8. Що таке збіжність чисельного методу?
9. Як визначається порядок апроксимації?
10. Які критерії вибору чисельного методу для конкретної задачі?
11. Виведіть формулу методу Ейлера.
12. У чому різниця між явними та неявними методами?
13. Сформулюйте метод Рунге–Кутти 4-го порядку.
14. Що таке А-стійкість?
15. Що таке жорстка система диференціальних рівнянь?
16. Як працюють адаптивні методи інтегрування?
17. Поясніть метод Адамса–Башфорта.
18. Поясніть метод Адамса–Моултона.
19. Як оцінюється локальна похибка інтегрування?
20. У чому полягає метод предиктор–коректор?
21. У чому полягає метод скінченних елементів?
22. Що таке слабка постановка задачі?
23. Поясніть поняття варіаційної форми задачі.
24. Як формується глобальна матриця жорсткості?
25. Що таке масова матриця?
26. Як реалізується часовий крок у динамічних задачах?
27. Що таке метод малих параметрів?
28. Поясніть метод багатьох масштабів.
29. Що таке асимптотичний розклад?
30. У чому суть принципу найменшої дії?
31. Що таке варіаційний інтегратор?
32. Як формується функціонал енергії?
33. Що таке метод Галеркіна?
34. У чому полягає метод Рітца?
35. Як перевіряється збіжність варіаційного методу?
36. Які переваги варіаційних методів для нелінійних задач?

37. Що таке чисельна нестійкість?
38. Поясніть критерій Куранта–Фрідрікса–Леві.
39. Що таке штучна в'язкість?
40. Що таке адаптивна сітка?
41. Як оцінюється апостеріорна похибка?
42. Що таке монотонність чисельної схеми?
43. Які способи зменшення осциляцій у розв'язку?
44. Запишіть хвильове рівняння та його фізичний зміст.
45. Як реалізується явна схема для хвильового рівняння?
46. Що таке дисперсійна похибка?
47. У чому складність мультифізичних моделей?
48. Що таке операторне розщеплення?
49. Як моделюється взаємодія рідина–структура?
50. Які методи застосовують для нелінійних хвиль?
51. Поясніть метод скінченних різниць для гіперболічних задач.
52. Що таке поглинаючі граничні умови?
53. Як оцінити енергетичну сталість чисельної схеми?
54. Що таке апроксимація та інтерполяція?
55. У чому полягає метод найменших квадратів?
56. Що таке регуляризація Тихонова?
57. Поясніть метод сплайн-апроксимації.
58. Що таке спектральний аналіз сигналу?
59. Як використовується перетворення Фур'є в аналізі динаміки?
60. Як будується сурогатна модель?
61. У чому полягає метод головних компонент?
62. Як оцінити похибку апроксимації?
63. Що таке задача оптимального керування?
64. Поясніть принцип максимуму Понтрягіна.
65. Що таке градієнтні методи оптимізації?
66. У чому полягає метод спряжених градієнтів?
67. Що таке обмежена оптимізація?
68. Як формулюється задача мінімізації функціонала?
69. Що таке стабілізація динамічної системи?
70. Як оцінюється чутливість розв'язку до параметрів?
71. У чому суть методу Монте-Карло?
72. Що таке випадкова величина та математичне сподівання?
73. Як оцінюється похибка Монте-Карло?
74. Що таке стохастичне диференціальне рівняння?
75. Поясніть метод Ейлера–Маруїями.
76. Що таке дисперсія оцінки?
77. Як працює квазі-Монте-Карло?
78. Що таке важливісне вибіркування?
79. Як моделюється випадковий шум?
80. Які застосування стохастичних методів у динаміці?
81. Що таке універсальні диференціальні рівняння?
82. Як оцінюється узагальнювальна здатність моделі?
83. Що таке перенавчання?
84. Які переваги та ризики використання ШІ у динамічному моделюванні?
85. Які сучасні тенденції розвитку обчислювальних методів у дослідженні динамічних процесів?